АНАЛИЗ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ КАНТОРА

[Analysis of Cantor's Continuum Hypothesis]

A. Nudelman

Abstract

В настоящей работе представлено все бесконечное множество положительных рациональных чисел. Данное множество было соотнесено с бесконечным множеством всех натуральных чисел, разделенным на группы; эти группы состоят из одинакового количества натуральных чисел. Предварительно, бесконечное множество рациональных чисел было линейно упорядочено в двух, взаимно перпендикулярных, направлениях. В данной статье разработан радикально новый подход к континуум-гипотезе (с учетом выводов К. Геделя и П. Коэна). Основное содержание этой работы сосредоточено в шести таблицах. Главная аргументация автора представлена в таблицах 5 и 6, а также в гл. 4.

1. Введение

1.1.1 Мы полагаем, что наиболее целесообразно в качестве введения к настоящей работе привести следующую цитату.
Пол Дж Коэн. *Теория множеств и континуум-гипотеза*. 1969 [1] (монография Пол. Дж. Коэна. Глава III, стр. 165)

> «Наша цель состоит в изложении гёделевского доказательства того, что если ZF непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после присоединения обобщенной континуум-гипотезы (ОКГ) и АВ. Континуум-гипотеза (КГ) была впервые высказана Кантором в 1878 г. Гильберт в своем знаменитом обращении 1900 г. указал перечень нерешенных проблем, в котором континуум-гипотеза шла под номером один. Эта проблема оставалась нерешенной, несмотря на многие попытки.»

1.1.2 Необходимо указать попытку Курта Гёделя доказать континуум-гипотезу Кантора. В своем доказательстве, опубликованном в 1940 году [2], Гёдель пришёл к выводу, что в системе аксиом ZFC (системе аксиом теории Цермело-Френкеля с аксиомой выбора) континуум-гипотезу опровергнуть невозможно. Коэн в 1963 году доказал, что в системе аксиом ZFC континуум-гипотезу Кантора нельзя ни опровергнуть, ни доказать.

2. Подход Кантора

2.1.1 Приведем еще одну цитату — письмо Кантора Дедекинду от 29 ноября 1873 года (см. [3], стр. 327; [4], стр. 12–13).

> «Позвольте предложить Вам вопрос, имеющий для меня некоторый теоретический интерес, на который я, однако, не могу ответить. Возможно, Вы сумеете это сделать и любезно напишите мне. Речь идет вот о чем.
> Возьмем совокупность всех целых положительных индивидов n и обозначим ее через (n). Затем рассмотрим совокупность всех действительных положительных числовых величин и обозначим ее через (x). Тогда возникает вопрос: можно ли сопоставить (n) с (x) так, чтобы каждому индивиду одной совокупности соответствовал один и только один индивид другой. На первый взгляд кажется, что это невозможно, так как (n) состоит из дискретных частей, тогда как (x) образует континуум. Однако это возражение ничего не дает, и как бы я не был склонен думать, что между (n) и (x) невозможно однозначное соответствие [3], я тем не менее не могу найти основание для этого, хотя оно, возможно, просто и именно оно занимает меня.
> *Не столь ли соблазнительно было бы заключить, что (n) нельзя поставить в однозначное соответствие с совокупностью (p/q) всех рациональных чисел p/q? И тем не менее нетрудно доказать, что (n) можно поставить в однозначное соответствие не только с этой совокупно-*

стью, но и с более общей совокупностью

$$(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ — любое число ν неограниченных целых положительных индексов.»

(В эту цитату мы ввели курсив — в последнюю часть текста.)

2.1.2 Данное письмо показывает следующее.

1. Кантор еще в 1873 году искал ответ на вопрос о счетности (или несчетности) «*совокупности всех действительных положительных числовых величин*», т.е. **континуума действительных положительных чисел**.
2. Как известно, Кантор начал исследования в области теории множеств в 1872 году. И уже к ноябрю 1873 доказал (***как он был уверен***), что можно сопоставить «совокупность всех целых положительных индивидов n» [**т.е. множество всех натуральных чисел**] с «совокупностью (p/q) всех рациональных чисел p/q» **так**, «чтобы ... каждому индивиду [*числу*] одной совокупности соответствовал один и только один индивид [*число*] другой».
   (Слова в квадратных скобках внесены в текст цитаты нами)
3. Отсюда следует: **Кантор был уверен, что он может доказать, что множество всех рациональных чисел является счетным множеством.**
4. Это впоследствии привело Кантора к **континуум-гипотезе**, т.е. к заключению, что между множеством **всех натуральных чисел** и множеством (***континуумом***) **всех действительных чисел *нет ни одного несчетного бесконечного числового множества***.

2.2.1 Рассмотрим упорядоченное **множество *всех* положительных рациональных чисел**. Приведем таблицу 1 (см. приложение), в которой каждая буква обозначает какое-либо рациональное число, например: $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, \ldots$; при этом первый индекс (в данном примере — $1, 1, 1, 1, \ldots$) соответствует числителю некоторой дроби, а второй индекс $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ соответствует знаменателю той же дроби. (*Таблица 1 — в отличие от всех других таблиц, приведенных в настоящей работе, является номинальной, условной.*)

2.2.2 С помощью ***натуральных чисел*** будем считать **рациональные числа** (последовательность счета рациональных чисел указана в таблице стрелками). ***Согласно Кантору*, мы *сможем* пересчитать** данным способом — *двигаясь по стрелкам* — ***все*** **рациональные числа**, составляющие *исследуемое бесконечное множество*.

2.2.3 Перейдем к таблице 2 (см. приложение). При построении этой таблицы было введено следующее ограничение: в ней *представлены только такие рациональные числа*, числитель и знаменатель которых — это **одно из следующих чисел**: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

2.2.4 Таблица 2 — это некоторый частный пример. Он относится к изложенному выше, в §2.2.1, §2.2.2.

Констатируем: *двигаясь по стрелкам* — от числа к числу — *мы* ***сможем*** **пересчитать** с помощью натуральных чисел *все рациональные числа, приведенные в таблице 2* (в квадратных скобках, под каждым *рациональным числом*, указано соответствующее ему — согласно счету — *натуральное число*).

3. Множество всех рациональных чисел

3.1.1 Проведем еще раз ***счет*** **всех положительных рациональных чисел**. При этом, ***согласно подходу Кантора*** (изложенному в цитате, приведенной в гл. 2, §2.1.1), мы *должны сопоставить* ***все*** *положительные* **целые числа (т.е. натуральные числа)** ***со всеми*** *положительными* **рациональными числами** *так, чтобы каждому* **целому (натуральному) числу** *однозначно соответствовало одно и только одно* ***рациональное*** **число**.

3.1.2 Исследуем *множество* ***всех*** *положительных* **рациональных чисел**, *линейно упорядоченное в двух взаимно-перпендикулярных направлениях*. Некоторый фрагмент указанного упорядоченного бесконечного множества приведен в таблицах 3 и 4 (см. приложение).

3.1.3 Как показывают таблицы 3 и 4, одно направление линейного упорядочения рациональных чисел («по горизонтали») связано с знаменателем дроби, а второе («по вертикали») связано с числителем дроби: «по вертикали» числа **возрастают**, а «по горизонтали» они **убывают**. В эти таблицы введены также и те рациональные числа, которые уже рассматривались ранее — на основании таблицы 2.

3.1.4 При построении таблиц 3 и 4 принято условие, аналогичное тому условию (ограничению), которое была введено при построении таблицы 2 — *представлены только такие рациональные числа*, числитель и знаменатель которых могут быть записаны **одним из следующих чисел**: $1, 2, 3, 4, \ldots 17, 18, 19, 20$. В верхней части таблиц 3 и 4 приведены **натуральные числа**.

3.2.1 Рассмотрим **натуральные числа**. ***Преобразуем*** *линейно упорядоченное* **множество** ***всех*** **натуральных чисел**: данное бесконечное множество — начиная с 1 и продолжая до ∞ — ***разделим на одинаковые конечные группы чисел***.

3.2.2 Пусть в каждой группе будет 10 чисел. Следовательно, линейно упорядоченное **множество всех натуральных чисел** можно будет так представить: ***1-я группа, 2-я группа, 3-я группа, 4-я группа,...***

3.2.3 Введем таблицу 5 (см. приложение). Таблица 5 — *обобщенно* — отображает ***всё*** **упорядоченное множество** ***всех*** **положительных рациональных чисел** (в данную, *обобщенную*, таблицу включены также и повторяющиеся рациональные числа; эти числа не отмечены).

3.2.4 В таблице 5 представлены 900 рациональных чисел (эти числа упорядочены так, как указано в §3.1.3 — при описании таблиц 3 и 4):

- в «**части A**» из 100 чисел 37 чисел — повторяющиеся;
- в «**части B**» из 300 чисел 108 чисел — повторяющиеся;
- в «**части C**» из 500 чисел 200 чисел — повторяющиеся

(соответственно, 63 числа, 192 числа и 300 чисел — не повторяющиеся).

3.3.1 Констатируем.

1. Части таблицы 5 (A, B, C) отличаются одна от другой на 200 чисел.
2. «Часть B» и «часть C» имеют форму «*прямого угла*».

3.3.2 Таблицу 5 можно продолжать ***неограниченно***:

- сначала построить «**часть D**» (в форме «прямого угла»), в которой будет 700 чисел; из них 276 чисел — повторяющися (и, соответственно, 424 числа не повторяющиеся, дополнительные);
- затем построить «**часть E**» (той же формы), в которой будет 900 чисел; из них 332 числа повторяющиеся (и соответственно, 568 чисел не повторяющиеся, дополнительные);
  и т.д.

3.3.3 Перейдем к таблице 6. В этой таблице приведена «***группа 93***» (группа натуральных чисел от 921 до 930) и соответствующая «***группе 93***» **часть бесконечного множества всех положительных рациональных чисел**.

3.3.4 Выше, в §3.3.2, указано, что **таблицу 5 можно продолжать неограниченно**. Часть бесконечного множества положительных рациональных чисел, представленная в таблице 6, есть пример (*выбранный произвольно*) продолжения таблицы 5.

3.4.1 Для каждой из описанных в §3.2.4 частей (A, B, C) таблицы 5 *указана та или иная группа из* 10 *натуральных чисел*: группа 1, группа 2 и группа 3.

3.4.2 Из данной таблицы однозначно следует, что **невозможно** — ***принципиально невозможно*** — сопоставить два исследуемых бесконечных множества так, чтобы одному натуральному числу соответствовало бы одно (и только одно) рациональное число, двум натуральным числам соответствовали бы два (и только два) рациональных числа, трем натуральным числам соответствовали бы три (и только три) рациональных числа... (**см. изложенное в §2.1.1, §3.1.1**).

4. Заключение

Часть I

4.1.1 Как известно, Кантор считал *рациональные числа* двигаясь по линиям, указанным в таблицах 1, 2, 3, 4. Такой **счет** приводит к **логической ошибке**: *возникает уверенность*, что — последовательно двигаясь от одного рационального числа к другому (см. таблицу 4) — **можно пересчитать** ***все числа***, составляющие бесконечное множество *положительных рациональных чисел*.

4.1.2 Относительно недавно, в конце 20 века, Н. Галкин и Г. Вилф предложили другой **способ счета** *положительных рациональных чисел* [5], составляющих данное бесконечное множество. Этот **способ счета** также приводит к указанной выше **логической ошибке**.

4.2.1 Бесконечные множества рациональных и натуральных чисел необходимо представить так, чтобы они были ***прямо («напрямую») сопоставлены одно с другим***.

4.2.2 Эта задача была решена построением особой таблицы — таблицы 5, которую можно **продолжать неограниченно** (см. §3.3.4). Рассмотрим первую часть таблицы — **часть A**; таблица 5 показывает:

- **для пересчета** ***рациональных чисел*** части A были взяты натуральные числа от 1 до 41 (см. таблицу 3), **однако можно использовать только** ***натуральные числа*** $\mathbf{1, 2, 3, \ldots 8, 9, 10}$;

- *натуральные числа* $11, 12, 13, \dots 18, 19, 20$ в части A использовать нельзя, т.к. они необходимы для пересчета чисел части B;
- также нельзя использовать *натуральные числа* $21, 22, 23, \dots 28, 29, 30$, поскольку они необходимы для пересчета чисел части C;
- нельзя использовать в части A *натуральные числа* $31, 32, 33, \dots 38, 39, 40$, поскольку они необходимы для пересчета чисел части D;
  и т.д.

4.2.3 Это означает, что **следует пересчитать** 63 *рациональных числа* **части A** с помощью 10 *натуральных чисел* группы 1 — пересчитать так, чтобы одному натуральному числу соответствовало одно (и только одно) рациональное число, двум натуральным числам соответствовало бы два (и только два) рациональных числа и т.д.

4.2.4 Далее аналогично.

Часть B: требуется пересчитать 192 *рациональных числа* используя только **10** *натуральных чисел* группы 2.
Часть C: требуется пересчитать **300** *рациональных чисел* используя только 10 *натуральных чисел* группы 3.
Часть D: требуется пересчитать 424 *рациональных числа* используя только 10 *натуральных чисел* группы 4.
И т.д.

4.2.5 Констатируем (вывод):

множество всех положительных рациональных чисел — это несчетное множество.

Часть II

4.3.1 Приведем второе доказательство сформулированного выше вывода.

4.3.2 Укажем следующее:

- подход предложенный Кантором позволяет последовательно **считать** — *одно за одним* — рациональные числа (см. таблицы 1, 2, 3, 4);
- но перед Кантором стояла другая, совсем другая, задача — **пересчитать** ***все*** *рациональные числа*.

4.4.1 Рассмотрим еще раз таблицу 5. Она построена так:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4,\dots & 11, & 12, & 13, & 14,\dots & 21, & 22, & 23, & 24,\dots \\ 1/1, & 1/2, & 1/3, & 1/4,\dots & 1/11, & 1/12, & 1/13, & 1/14,\dots & 1/21, & 1/22, & 1/23, & 1/24,\dots \end{array}$$

Здесь:

Верхняя строка — это последовательность всех натуральных чисел (натуральные числа записаны над таблицей) — это **всё бесконечное множество** натуральных чисел.

Нижняя строка — это первая строка в таблице всех (положительных) рациональных чисел; данная строка **есть малая часть** указанного бесконечного множества.

4.4.2 Давайте ***взаимно-однозначно*** сопоставим соответствующие элементы двух строк:

1 и 1/1, 2 и 1/2, 3 и 1/3, 4 и 1/4 . . . и т.д.

Из такого сопоставления следует, что для пересчета всех рациональных чисел, которые находятся в первой (бесконечной) строке таблицы 5, мы должны использовать («израсходовать») ***всё*** *бесконечное множество натуральных чисел*. **А чем же пересчитывать все остальные рациональные числа?!**

Дополнение

Трансфинитные ординалы

1.1 Примем следующую исходную предпосылку (базисное условие).

Если дано:

$$\infty + 1, +2, +3, \dots,$$

то

$$\infty + 1 = \infty, \quad \infty + 2 = \infty, \quad \infty + 3 = \infty, \dots$$

1.2 Соответственно, согласно §1.1

$$\infty + 1, 2, 3, \dots = \infty$$

2.1 Представим 2 упорядоченных множества всех натуральных чисел (обозначим их $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$), записанных последовательно

$$1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots, \infty; \qquad 1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots, \infty$$

2.2 Констатируем:

> **упорядоченные множества $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ — это 2 одинаковых, автономных и не связанных одно с другим множества всех натуральных чисел** (*обратное утверждение — см. §4.1*).

3.1 Представим 4 упорядоченных множества всех натуральных чисел: $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4$, записанных последовательно в виде «прямой линии»

$$1, 2, 3, \dots\dots, \infty; \qquad 1, 2, 3, \dots\dots, \infty; \qquad 1, 2, 3, \dots\dots, \infty; \qquad 1, 2, 3, \dots\dots, \infty$$

3.2 Констатируем:

> **имеются 4 упорядоченных множества всех натуральных чисел — одинаковых, автономных и не связанных одно с другим** (*обратное утверждение — см. §4.1*).

4.1 Как известно, Кантор (исходя из введенного им понятия об ***«актуальной бесконечности»***) рассматривал последовательности множеств натуральных чисел, представленные в §2.1 и §3.1, *как единое целое, построенное из трансфинитных ординалов*.

4.2 Но это недопустимо, неверно: *у ∞ не существует конец — «окончание бесконечности».* Если принять, что множества, представленные в §2.1 и §3.1, составляют «*единое целое*», то для них будет

$$1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots, \underbrace{\infty; \qquad 1, 2, 3}_{\infty+1,2,3,\dots}, \dots\dots\dots\dots, \infty;$$

$$1, 2, 3, \dots\dots, \underbrace{\infty; \qquad 1, 2, 3}_{\infty+1,2,3,\dots}, \dots\dots, \underbrace{\infty; \qquad 1, 2, 3}_{\infty+1,2,3,\dots}, \dots\dots, \underbrace{\infty; \qquad 1, 2, 3}_{\infty+1,2,3,\dots}, \dots\dots, \infty$$

В соответствии с §1.2

$$\infty + 1, 2, 3, \dots = \infty$$

Это означает, что все трансфинитные ординалы будут радикально изменены — ***«полностью разрушены»***.

5.1 Имеются 4 упорядоченных множества всех положительных рациональных чисел; обозначим их $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4$.

5.2 $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4$ есть 4 одинаковых, автономных и не связанных одно с другим упорядоченных множества всех рациональных чисел.

6.1 Соотнесем — **попарно** — 4 упорядоченных множества всех натуральных чисел (описанных в §2.1–§3.2) и 4 упорядоченных множества всех положительных рациональных чисел

> $\bar{N}_1$ и $\bar{R}_1$, $\bar{N}_2$ и $\bar{R}_2$, $\bar{N}_3$ и $\bar{R}_3$, $\bar{N}_4$ и $\bar{R}_4$

6.2 *То, что было показано в нашей статье для бесконечных множеств $\bar{N}_1$ и $\bar{R}_1$, также верно и для бесконечных множеств $\bar{N}_2$ и $\bar{R}_2$, $\bar{N}_3$ и $\bar{R}_3$, $\bar{N}_4$ и $\bar{R}_4$.*

References

[1] Пол Джозеф Коэн. *Теория множеств и континуум-гипотеза.* Москва: Мир, 1969, с. 347. (Перв. публ.: *Set theory and the continum hypothesis* , New York, W.A. Benjamin).

[2] Kurt Gödel. *The consistency of the continuum hypothesis.* Princeton University Press, 1940.

[3] Георг Кантор. «Труды по теории множеств». В: Классики науки. Москва: Наука, 1985, с. 327—372. (Перв. публ.: *Briefwechsel Cantor-Dedekind* , Hermann, Paris).

[4] Georg Cantor. *Briefwechsel Cantor-Dedekind.* Нем. Под ред. E. Noether и J. Cavaillès. Paris: Hermann, 1937, с. 62.

[5] H. Wilf и N. Calkin. «Recounting the rationals». В: *The American Mathematical Monthly* 107.4 (апр. 2000), с. 360—363.

Приложение

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$	$a_{1,9}$	$a_{1,10}$	$\dots$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$	$a_{2,8}$	$a_{2,9}$	$a_{2,10}$	$\dots$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	$a_{3,7}$	$a_{3,8}$	$a_{3,9}$	$a_{3,10}$	$\dots$
$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$	$a_{4,7}$	$a_{4,8}$	$a_{4,9}$	$a_{4,10}$	$\dots$
$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$	$a_{5,7}$	$a_{5,8}$	$a_{5,9}$	$a_{5,10}$	$\dots$
$a_{6,1}$	$a_{6,2}$	$a_{6,3}$	$a_{6,4}$	$a_{6,5}$	$a_{6,6}$	$a_{6,7}$	$a_{6,8}$	$a_{6,9}$	$a_{6,10}$	$\dots$
$a_{7,1}$	$a_{7,2}$	$a_{7,3}$	$a_{7,4}$	$a_{7,5}$	$a_{7,6}$	$a_{7,7}$	$a_{7,8}$	$a_{7,9}$	$a_{7,10}$	$\dots$
$a_{8,1}$	$a_{8,2}$	$a_{8,3}$	$a_{8,4}$	$a_{8,5}$	$a_{8,6}$	$a_{8,7}$	$a_{8,8}$	$a_{8,9}$	$a_{8,10}$	$\dots$
$a_{9,1}$	$a_{9,2}$	$a_{9,3}$	$a_{9,4}$	$a_{9,5}$	$a_{9,6}$	$a_{9,7}$	$a_{9,8}$	$a_{9,9}$	$a_{9,10}$	$\dots$
$a_{10,1}$	$a_{10,2}$	$a_{10,3}$	$a_{10,4}$	$a_{10,5}$	$a_{10,6}$	$a_{10,7}$	$a_{10,8}$	$a_{10,9}$	$a_{10,10}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1/1 [1]	1/2 [2]	1/3 [5]	1/4 [6]	1/5 [11]	1/6 [12]	1/7 [21]	1/8 [22]	1/9 [31]	1/10 [32]
2/1 [3]		2/3 [7]		2/5 [13]		2/7 [23]		2/9 [33]	
3/1 [4]	3/2 [8]		3/4 [14]	3/5 [20]		3/7 [30]	3/8 [34]		3/10
4/1 [9]		4/3 [15]		4/5 [24]		4/7 [35]		4/9	
5/1 [10]	5/2 [16]	5/3 [19]	5/4 [25]		5/6 [36]	5/7	5/8	5/9	
6/1 [17]				6/5 [37]		6/7			
7/1 [18]	7/2 [26]	7/3 [29]	7/4 [38]	7/5	7/6		7/8	7/9	7/10
8/1 [27]		8/3 [39]		8/5		8/7		8/9	
9/1 [28]	9/2 [40]		9/4	9/5		9/7	9/8		9/10
10/1 [41]		10/3				10/7		10/9	

Таблица 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	....
1/1 [1]	1/2 [2]	1/3 [5]	1/4 [6]	1/5 [11]	1/6 [12]	1/7 [21]	1/8 [22]	1/9 [31]	1/10 [32]	1/11	1/12	1/13	1/14	1/15	1/16	1/17	1/18	1/19	1/20	....
2/1 [3]		2/3 [7]		2/5 [13]		2/7 [23]		2/9 [33]		2/11		2/13		2/15		2/17		2/19		....
3/1 [4]	3/2 [8]		3/4 [14]	3/5 [20]		3/7 [30]	3/8 [34]		3/10	3/11		3/13	3/14		3/16	3/17		3/19	3/20	....
4/1 [9]		4/3 [15]		4/5 [24]		4/7 [35]		4/9		4/11		4/13		4/15		4/17		4/19		....
5/1 [10]	5/2 [16]	5/3 [19]	5/4 [25]		5/6 [36]	5/7	5/8	5/9		5/11	5/12	5/13	5/14		5/16	5/17	5/18	5/19		....
6/1 [17]				6/5 [37]		6/7				6/11		6/13				6/17		6/19		....
7/1 [18]	7/2 [26]	7/3 [29]	7/4 [38]	7/5	7/6		7/8	7/9	7/10	7/11	7/12	7/13		7/15	7/16	7/17	7/18	7/19	7/20	....
8/1 [27]		8/3 [39]		8/5		8/7		8/9		8/11		8/13		8/15		8/17		8/19		....
9/1 [28]	9/2 [40]		9/4	9/5		9/7	9/8		9/10	9/11		9/13	9/14		9/16	9/17		9/19	9/20	....
10/1 [41]		10/3				10/7		10/9		10/11		10/13				10/17		10/19		....
11/1	11/2	11/3	11/4	11/5	11/6	11/7	11/8	11/9	11/10		11/12	11/13	11/14	11/15	11/16	11/17	11/18	11/19	11/20	....
12/1				12/5		12/7				12/11		12/13				12/17		12/19		....
13/1	13/2	13/3	13/4	13/5	13/6	13/7	13/8	13/9	13/10	13/11	13/12		13/14	13/15	13/16	13/17	13/18	13/19	13/20	....
14/1		14/3		14/5				14/9		14/11		14/13		14/15		14/17		14/19		....
15/1	15/2		15/4			15/7	15/8			15/11		15/13	15/14		15/16	15/17		15/19		....
16/1		16/3		16/5		16/7		16/9		16/11		16/13		16/15		16/17		16/19		....
17/1	17/2	17/3	17/4	17/5	17/6	17/7	17/8	17/9	17/10	17/11	17/12	17/13	17/14	17/15	17/16		17/18	17/19	17/20	....
18/1				18/5		18/7				18/11		18/13				18/17		18/19		....
19/1	19/2	19/3	19/4	19/5	19/6	19/7	19/8	19/9	19/10	19/11	19/12	19/13	19/14	19/15	19/16	19/17	19/18		19/20	....
20/1		20/3				20/7		20/9		20/11		20/13				20/17		20/19		....
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	....
1/1 [1]	1/2 [2]	1/3 [5]	1/4 [6]	1/5 [11]	1/6 [12]	1/7 [21]	1/8 [22]	1/9 [31]	1/10 [32]	1/11 [45]	1/12 [46]	1/13 [63]	1/14 [64]	1/15 [79]	1/16 [80]	1/17 [101]	1/18 [102]	1/19 [127]	1/20 [128]	....
2/1 [3]		2/3 [7]		2/5 [13]		2/7 [23]		2/9 [33]		2/11 [47]		2/13 [65]		2/15 [81]		2/17 [103]		2/19 [129]		....
3/1 [4]	3/2 [8]		3/4 [14]	3/5 [20]		3/7 [30]	3/8 [34]		3/10 [48]	3/11 [62]		3/13 [78]	3/14 [82]		3/16 [104]	3/17 [126]		3/19	3/20	....
4/1 [9]		4/3 [15]		4/5 [24]		4/7 [35]		4/9 [49]		4/11 [66]		4/13 [83]		4/15 [105]		4/17 [130]		4/19		....
5/1 [10]	5/2 [16]	5/3 [19]	5/4 [25]		5/6 [36]	5/7 [44]	5/8 [50]	5/9 [61]		5/11 [77]	5/12 [84]	5/13 [100]	5/14 [106]		5/16 [131]	5/17	5/18	5/19		....
6/1 [17]				6/5 [37]		6/7 [51]				6/11 [85]		6/13 [107]				6/17		6/19		....
7/1 [18]	7/2 [26]	7/3 [29]	7/4 [38]	7/5 [43]	7/6 [52]		7/8 [67]	7/9 [76]	7/10 [86]	7/11 [99]	7/12 [108]	7/13 [125]		7/15	7/16	7/17	7/18	7/19	7/20	....
8/1 [27]		8/3 [39]		8/5 [53]		8/7 [68]		8/9 [87]		8/11 [109]		8/13 [132]		8/15		8/17		8/19		....
9/1 [28]	9/2 [40]		9/4 [54]	9/5 [60]		9/7 [75]	9/8 [88]		9/10 [110]	9/11 [124]		9/13	9/14		9/16	9/17		9/19	9/20	....
10/1 [41]		10/3 [55]				10/7 [89]		10/9 [111]		10/11 [133]		10/13				10/17		10/19		....
11/1 [42]	11/2 [56]	11/3 [59]	11/4 [69]	11/5 [74]	11/6 [90]	11/7 [98]	11/8 [112]	11/9 [123]	11/10 [134]		11/12	11/13	11/14	11/15	11/16	11/17	11/18	11/19	11/20	....
12/1 [57]				12/5 [91]		12/7 [113]				12/11		12/13				12/17		12/19		....
13/1 [58]	13/2 [70]	13/3 [73]	13/4 [92]	13/5 [97]	13/6 [114]	13/7 [122]	13/8 [135]	13/9	13/10	13/11	13/12		13/14	13/15	13/16	13/17	13/18	13/19	13/20	....
14/1 [71]		14/3 [93]		14/5 [115]				14/9		14/11		14/13		14/15		14/17		14/19		....
15/1 [72]	15/2 [94]		15/4 [116]			15/7	15/8			15/11		15/13	15/14		15/16	15/17		15/19		....
16/1 [95]		16/3 [117]		16/5 [136]		16/7		16/9		16/11		16/13		16/15		16/17		16/19		....
17/1 [96]	17/2 [118]	17/3 [121]	17/4 [137]	17/5	17/6	17/7	17/8	17/9	17/10	17/11	17/12	17/13	17/14	17/15	17/16		17/18	17/19	17/20	....
18/1 [119]				18/5		18/7				18/11		18/13				18/17		18/19		....
19/1 [120]	19/2 [138]	19/3	19/4	19/5	19/6	19/7	19/8	19/9	19/10	19/11	19/12	19/13	19/14	19/15	19/16	19/17	19/18		19/20	....
20/1 [139]		20/3				20/7		20/9		20/11		20/13				20/17		20/19		....
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Таблица 4

	Группа 1										Группа 2										Группа 3												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	....
	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	1/13	1/14	1/15	1/16	1/17	1/18	1/19	1/20	1/21	1/22	1/23	1/24	1/25	1/26	1/27	1/28	1/29	1/30	1/31	1/32	
	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	2/10	2/11	2/12	2/13	2/14	2/15	2/16	2/17	2/18	2/19	2/20	2/21	2/22	2/23	2/24	2/25	2/26	2/27	2/28	2/29	2/30	2/31	2/32	
	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	3/9	3/10	3/11	3/12	3/13	3/14	3/15	3/16	3/17	3/18	3/19	3/20	3/21	3/22	3/23	3/24	3/25	3/26	3/27	3/28	3/29	3/30	3/31	3/32	
	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	4/9	4/10	4/11	4/12	4/13	4/14	4/15	4/16	4/17	4/18	4/19	4/20	4/21	4/22	4/23	4/24	4/25	4/26	4/27	4/28	4/29	4/30	4/31	4/32	
A	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	5/9	5/10	5/11	5/12	5/13	5/14	5/15	5/16	5/17	5/18	5/19	5/20	5/21	5/22	5/23	5/24	5/25	5/26	5/27	5/28	5/29	5/30	5/31	5/32	
	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	6/9	6/10	6/11	6/12	6/13	6/14	6/15	6/16	6/17	6/18	6/19	6/20	6/21	6/22	6/23	6/24	6/25	6/26	6/27	6/28	6/29	6/30	6/31	6/32	
	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	7/9	7/10	7/11	7/12	7/13	7/14	7/15	7/16	7/17	7/18	7/19	7/20	7/21	7/22	7/23	7/24	7/25	7/26	7/27	7/28	7/29	7/30	7/31	7/32	
	8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	8/9	8/10	8/11	8/12	8/13	8/14	8/15	8/16	8/17	8/18	8/19	8/20	8/21	8/22	8/23	8/24	8/25	8/26	8/27	8/28	8/29	8/30	8/31	8/32	
	9/1	9/2	9/3	9/4	9/5	9/6	9/7	9/8	9/9	9/10	9/11	9/12	9/13	9/14	9/15	9/16	9/17	9/18	9/19	9/20	9/21	9/22	9/23	9/24	9/25	9/26	9/27	9/28	9/29	9/30	9/31	9/32	
	10/1	10/2	10/3	10/4	10/5	10/6	10/7	10/8	10/9	10/10	10/11	10/12	10/13	10/14	10/15	10/16	10/17	10/18	10/19	10/20	10/21	10/22	10/23	10/24	10/25	10/26	10/27	10/28	10/29	10/30	10/31	10/32	
	11/1	11/2	11/3	11/4	11/5	11/6	11/7	11/8	11/9	11/10	11/11	11/12	11/13	11/14	11/15	11/16	11/17	11/18	11/19	11/20	11/21	11/22	11/23	11/24	11/25	11/26	11/27	11/28	11/29	11/30	11/31	11/32	
	12/1	12/2	12/3	12/4	12/5	12/6	12/7	12/8	12/9	12/10	12/11	12/12	12/13	12/14	12/15	12/16	12/17	12/18	12/19	12/20	12/21	12/22	12/23	12/24	12/25	12/26	12/27	12/28	12/29	12/30	12/31	12/32	
	13/1	13/2	13/3	13/4	13/5	13/6	13/7	13/8	13/9	13/10	13/11	13/12	13/13	13/14	13/15	13/16	13/17	13/18	13/19	13/20	13/21	13/22	13/23	13/24	13/25	13/26	13/27	13/28	13/29	13/30	13/31	13/32	
	14/1	14/2	14/3	14/4	14/5	14/6	14/7	14/8	14/9	14/10	14/11	14/12	14/13	14/14	14/15	14/16	14/17	14/18	14/19	14/20	14/21	14/22	14/23	14/24	14/25	14/26	14/27	14/28	14/29	14/30	14/31	14/32	
B	15/1	15/2	15/3	15/4	15/5	15/6	15/7	15/8	15/9	15/10	15/11	15/12	15/13	15/14	15/15	15/16	15/17	15/18	15/19	15/20	15/21	15/22	15/23	15/24	15/25	15/26	15/27	15/28	15/29	15/30	15/31	15/32	
	16/1	16/2	16/3	16/4	16/5	16/6	16/7	16/8	16/9	16/10	16/11	16/12	16/13	16/14	16/15	16/16	16/17	16/18	16/19	16/20	16/21	16/22	16/23	16/24	16/25	16/26	16/27	16/28	16/29	16/30	16/31	16/32	
	17/1	17/2	17/3	17/4	17/5	17/6	17/7	17/8	17/9	17/10	17/11	17/12	17/13	17/14	17/15	17/16	17/17	17/18	17/19	17/20	17/21	17/22	17/23	17/24	17/25	17/26	17/27	17/28	17/29	17/30	17/31	17/32	
	18/1	18/2	18/3	18/4	18/5	18/6	18/7	18/8	18/9	18/10	18/11	18/12	18/13	18/14	18/15	18/16	18/17	18/18	18/19	18/20	18/21	18/22	18/23	18/24	18/25	18/26	18/27	18/28	18/29	18/30	18/31	18/32	
	19/1	19/2	19/3	19/4	19/5	19/6	19/7	19/8	19/9	19/10	19/11	19/12	19/13	19/14	19/15	19/16	19/17	19/18	19/19	19/20	19/21	19/22	19/23	19/24	19/25	19/26	19/27	19/28	19/29	19/30	19/31	19/32	
	20/1	20/2	20/3	20/4	20/5	20/6	20/7	20/8	20/9	20/10	20/11	20/12	20/13	20/14	20/15	20/16	20/17	20/18	20/19	20/20	20/21	20/22	20/23	20/24	20/25	20/26	20/27	20/28	20/29	20/30	20/31	20/32	
	21/1	21/2	21/3	21/4	21/5	21/6	21/7	21/8	21/9	21/10	21/11	21/12	21/13	21/14	21/15	21/16	21/17	21/18	21/19	21/20	21/21	21/22	21/23	21/24	21/25	21/26	21/27	21/28	21/29	21/30	21/31	21/32	
	22/1	22/2	22/3	22/4	22/5	22/6	22/7	22/8	22/9	22/10	22/11	22/12	22/13	22/14	22/15	22/16	22/17	22/18	22/19	22/20	22/21	22/22	22/23	22/24	22/25	22/26	22/27	22/28	22/29	22/30	22/31	22/32	
	23/1	23/2	23/3	23/4	23/5	23/6	23/7	23/8	23/9	23/10	23/11	23/12	23/13	23/14	23/15	23/16	23/17	23/18	23/19	23/20	23/21	23/22	23/23	23/24	23/25	23/26	23/27	23/28	23/29	23/30	23/31	23/32	
	24/1	24/2	24/3	24/4	24/5	24/6	24/7	24/8	24/9	24/10	24/11	24/12	24/13	24/14	24/15	24/16	24/17	24/18	24/19	24/20	24/21	24/22	24/23	24/24	24/25	24/26	24/27	24/28	24/29	24/30	24/31	24/32	
C	25/1	25/2	25/3	25/4	25/5	25/6	25/7	25/8	25/9	25/10	25/11	25/12	25/13	25/14	25/15	25/16	25/17	25/18	25/19	25/20	25/21	25/22	25/23	25/24	25/25	25/26	25/27	25/28	25/29	25/30	25/31	25/32	
	26/1	26/2	26/3	26/4	26/5	26/6	26/7	26/8	26/9	26/10	26/11	26/12	26/13	26/14	26/15	26/16	26/17	26/18	26/19	26/20	26/21	26/22	26/23	26/24	26/25	26/26	26/27	26/28	26/29	26/30	26/31	26/32	
	27/1	27/2	27/3	27/4	27/5	27/6	27/7	27/8	27/9	27/10	27/11	27/12	27/13	27/14	27/15	27/16	27/17	27/18	27/19	27/20	27/21	27/22	27/23	27/24	27/25	27/26	27/27	27/28	27/29	27/30	27/31	27/32	
	28/1	28/2	28/3	28/4	28/5	28/6	28/7	28/8	28/9	28/10	28/11	28/12	28/13	28/14	28/15	28/16	28/17	28/18	28/19	28/20	28/21	28/22	28/23	28/24	28/25	28/26	28/27	28/28	28/29	28/30	28/31	28/32	
	29/1	29/2	29/3	29/4	29/5	29/6	29/7	29/8	29/9	29/10	29/11	29/12	29/13	29/14	29/15	29/16	29/17	29/18	29/19	29/20	29/21	29/22	29/23	29/24	29/25	29/26	29/27	29/28	29/29	29/30	29/31	29/32	
	30/1	30/2	30/3	30/4	30/5	30/6	30/7	30/8	30/9	30/10	30/11	30/12	30/13	30/14	30/15	30/16	30/17	30/18	30/19	30/20	30/21	30/22	30/23	30/24	30/25	30/26	30/27	30/28	30/29	30/30	30/31	30/32	
	31/1	31/2	31/3	31/4	31/5	31/6	31/7	31/8	31/9	31/10	31/11	31/12	31/13	31/14	31/15	31/16	31/17	31/18	31/19	31/20	31/21	31/22	31/23	31/24	31/25	31/26	31/27	31/28	31/29	31/30	31/31	31/32	
	32/1	32/2	32/3	32/4	32/5	32/6	32/7	32/8	32/9	32/10	32/11	32/12	32/13	32/14	32/15	32/16	32/17	32/18	32/19	32/20	32/21	32/22	32/23	32/24	32/25	32/26	32/27	32/28	32/29	32/30	32/31	32/32	

Таблица 5

В части бесконечного множества

положительных рациональных чисел,

представленной в данной таблице,

имеется 18500 рациональных чисел

(включая повторяющиеся).

Группа 93

921	922	923	924	925	926	927	928	929	930
1/921	1/922	1/923	1/924	1/925	1/926	1/927	1/928	1/929	1/930
2/921	2/922	2/923	2/924	2/925	2/926	2/927	2/928	2/929	2/930
3/921	3/922	3/923	3/924	3/925	3/926	3/927	3/928	3/929	3/930
4/921	4/922	4/923	4/924	4/925	4/926	4/927	4/928	4/929	4/930
5/921	5/922	5/923	5/924	5/925	5/926	5/927	5/928	5/929	5/930
6/921	6/922	6/923	6/924	6/925	6/926	6/927	6/928	6/929	6/930
7/921	7/922	7/923	7/924	7/925	7/926	7/927	7/928	7/929	7/930
8/921	8/922	8/923	8/924	8/925	8/926	8/927	8/928	8/929	8/930
9/921	9/922	9/923	9/924	9/925	9/926	9/927	9/928	9/929	9/930
10/921	10/922	10/923	10/924	10/925	10/926	10/927	10/928	10/929	10/930
11/921	11/922	11/923	11/924	11/925	11/926	11/927	11/928	11/929	11/930
12/921	12/922	12/923	12/924	12/925	12/926	12/927	12/928	12/929	12/930
13/921	13/922	13/923	13/924	13/925	13/926	13/927	13/928	13/929	13/930
14/921	14/922	14/923	14/924	14/925	14/926	14/927	14/928	14/929	14/930
15/921	15/922	15/923	15/924	15/925	15/926	15/927	15/928	15/929	15/930
16/921	16/922	16/923	16/924	16/925	16/926	16/927	16/928	16/929	16/930
17/921	17/922	17/923	17/924	17/925	17/926	17/927	17/928	17/929	17/930
18/921	18/922	18/923	18/924	18/925	18/926	18/927	18/928	18/929	18/930
19/921	19/922	19/923	19/924	19/925	19/926	19/927	19/928	19/929	19/930
20/921	20/922	20/923	20/924	20/925	20/926	20/927	20/928	20/929	20/930
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

921/1	921/2	921/3	921/4	921/5	921/6	921/7	921/8	921/9	921/10	921/11	921/12	921/13	921/14	921/15	921/16	921/17	921/18	921/19	921/20	....	921/921	921/922	921/923	921/924	921/925	921/926	921/927	921/928	921/929	921/930
922/1	922/2	922/3	922/4	922/5	922/6	922/7	922/8	922/9	922/10	922/11	922/12	922/13	922/14	922/15	922/16	922/17	922/18	922/19	922/20	....	922/921	922/922	922/923	922/924	922/925	922/926	922/927	922/928	922/929	922/930
923/1	923/2	923/3	923/4	923/5	923/6	923/7	923/8	923/9	923/10	923/11	923/12	923/13	923/14	923/15	923/16	923/17	923/18	923/19	923/20	....	923/921	923/922	923/923	923/924	923/925	923/926	923/927	923/928	923/929	923/930
924/1	924/2	924/3	924/4	924/5	924/6	924/7	924/8	924/9	924/10	924/11	924/12	924/13	924/14	924/15	924/16	924/17	924/18	924/19	924/20	....	924/921	924/922	924/923	924/924	924/925	924/926	924/927	924/928	924/929	924/930
925/1	925/2	925/3	925/4	925/5	925/6	925/7	925/8	925/9	925/10	925/11	925/12	925/13	925/14	925/15	925/16	925/17	925/18	925/19	925/20	....	925/921	925/922	925/923	925/924	925/925	925/926	925/927	925/928	925/929	925/930
926/1	926/2	926/3	926/4	926/5	926/6	926/7	926/8	926/9	926/10	926/11	926/12	926/13	926/14	926/15	926/16	926/17	926/18	926/19	926/20	....	926/921	926/922	926/923	926/924	926/925	926/926	926/927	926/928	926/929	926/930
927/1	927/2	927/3	927/4	927/5	927/6	927/7	927/8	927/9	927/10	927/11	927/12	927/13	927/14	927/15	927/16	927/17	927/18	927/19	927/20	....	927/921	927/922	927/923	927/924	927/925	927/926	927/927	927/928	927/929	927/930
928/1	928/2	928/3	928/4	928/5	928/6	928/7	928/8	928/9	928/10	928/11	928/12	928/13	928/14	928/15	928/16	928/17	928/18	928/19	928/20	....	928/921	928/922	928/923	928/924	928/925	928/926	928/927	928/928	928/929	928/930
929/1	929/2	929/3	929/4	929/5	929/6	929/7	929/8	929/9	929/10	929/11	929/12	929/13	929/14	929/15	929/16	929/17	929/18	929/19	929/20	....	929/921	929/922	929/923	929/924	929/925	929/926	929/927	929/928	929/929	929/930
930/1	930/2	930/3	930/4	930/5	930/6	930/7	930/8	930/9	930/10	930/11	930/12	930/13	930/14	930/15	930/16	930/17	930/18	930/19	930/20	....	930/921	930/922	930/923	930/924	930/925	930/926	930/927	930/928	930/929	930/930

Таблица 6